И. В. Грибков, Некоторые решения уравнения синус-Гордона, получаемые с помощью преобразования Бэклунда, *УМН*, 1978, том 33, выпуск 2(200), 191–192

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА, ПОЛУЧАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА

И. В. Грибков

Уравнение синус-Гордона, которое далее будет предполагаться записанным в виде

$$\Phi_{xy}=\sin\Phi, \tag{1}$$

играет заметную роль в нескольких разделах современной теоретической физики (квантовая теория поля, теория сверхпроводимости — туннельный эффект Джозефсона). Естествен интерес к получению решений этого уравнения в конечном виде. Преобразование Бэклунда, изученное впервые в дифференциальной геометрии (см. [1]), является одним из методов получения решений уравнения (1). До сих пор преобразование Бэклунда применялось в ограниченном числе случаев быстроубывающих решений. В настоящей статье сфера применения преобразования Бэклунда несколько расширяется. Соответствующие решения приведены в пунктах 2 и 3. Обратим внимание на то, что эти решения, в отличие от большинства изучавшихся ранее решений уравнения (1), не имеют асимптотического стремления к нулю по модулю 2π при $x\to\pm\infty$.

1. Преобразование Бэклунда (см., например, [1], [2]) позволяет, имея некоторое решение $\Phi_n(x, y)$ уравнения (1), найти двухпараметрическое семейство $\Phi_{n+1}(x, y, k, c)$, $k\neq 0$, его решений из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial\Phi_{n+1}}{\partial x}=\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}+2k\sin\frac{\Phi_{n+1}+\Phi_n}{2},\quad \frac{\partial\Phi_{n+1}}{\partial y}=-\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}+\frac{2}{k}\sin\frac{\Phi_{n+1}-\Phi_n}{2}. \tag{2}$$

Используя в (2) решение Φ_{n+1} в роли Φ_n, можно найти решение Φ_{n+2} и аналогичным образом целую серию решений. Однако решение Φ_{n+2} может быть определено также и по формуле

$$\Phi_{n+2}=\Phi_n+4\operatorname{arctg}\left[\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\operatorname{tg}\frac{\Phi_{n+1}(x, y, k_1, c_1)-\Phi_{n+1}(x, y, k_2, c_2)}{4}\right] \tag{3}$$

без применения интегрирования. Здесь $k_i\neq 0$, c_i $(i=1, 2)$ — произвольные постоянные. Пусть $c=c(k)$ — дифференцируемая функция, причем $c_i=c(k_i)$. Переходя в (3) к пределу при $k_1\to k_2=k$ и обозначая $dc/dk=c_3$ произвольную постоянную, получим

$$\Phi_{n+2}=\Phi_n+4\operatorname{arctg}\left[\frac{k}{2}\left(\frac{\partial\Phi_{n+1}(x, y, k, c)}{\partial k}+c_3\frac{\partial\Phi_{n+1}}{\partial c}\right)\right].$$

Таким образом, для получения серии решений достаточно получить из решения Φ_0 решение Φ_1, проинтегрировав систему (2) один раз. Например, полагая $\Phi_0\equiv 0$, получим $\Phi_1=4\operatorname{arctg}\exp(kx+y/k+c)$. Некоторые другие решения Φ_0 уравнения (1) в достаточно удобном для преобразования Бэклунда виде записаны в [3] и рассматриваются в следующих двух пунктах.

2. $\Phi_0=2H^{-1}(x+y+c)$. Здесь и далее верхний индекс -1 обозначает обращение функции

$$H(t)=\int_0^t\left(\sqrt{\sin^2\tau+a^2}\right)^{-1}d\tau,\quad 0<a^2<\infty,$$

$a\neq 0$, c — произвольные постоянные. В (2) положим $k=1$. Благодаря этому систему (2) мы сможем представить в виде

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\Phi_1}{2}=\sin\dfrac{\Phi_1}{2}\cos t(u+c),\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\Phi_1}{2}=\sqrt{\sin^2 t(u+c)+a^2}+\cos\dfrac{\Phi_1}{2}\sin t(u+c),\end{cases} \tag{4}$$

где $u=x+y$, $v=x-y$, $t(u+c)=H^{-1}(u+c)$. Фиксируя переменную v в первом из уравнений (4) и учитывая, что при этом $d\Phi_1=(\Phi_1)_u du$, получим

$$d\left(\frac{\Phi_1}{2}\right)\Big/\sin\frac{\Phi_1}{2}=\cos t\,du. \tag{5}$$

Из определения функции $t(u+c)$ следует, что $du = dt/\sqrt{\sin^2 t + a^2}$. Учитывая это, проинтегрируем уравнение (5):

$$\Phi_1 = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin t\,(u+c) + \sqrt{\sin^2 t\,(u+c) + a^2}}{a} f(v) \right]. \tag{6}$$

Функцию $f(v)$ определим, подставляя (6) во второе из уравнений (4): $f(v) = \operatorname{tg} p$, $p = av/2 + c_1$, где c_1 — произвольная постоянная.

Заметим, что функция (6) разрывна при $p = \pi/2 + \pi n$ (n — целое), причем ее скачок в точках разрыва равен 4π вне зависимости от значения u. Очевидно, уравнение (1) допускает сдвиг решения на $4\pi n$, поэтому можно построить Φ_1' — решение уравнения (1), изменяющееся от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\Phi_1'(x, y) = \Phi_1(x, y) + 4\pi n \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} + \pi n < p < \frac{\pi}{2} + \pi(n+1),$$

$$\Phi_1'(x, y) = 2\pi + 4\pi n \quad \text{при} \quad p = \frac{\pi}{2} + \pi(n+1),\ n \text{ — целое.}$$

Оказывается, что функция Φ_1' принадлежит классу регулярности C^∞.

3. $\Phi_0 = 2 \arccos \dfrac{\cos t\,[(x+y)/\sqrt{1+a^2} + c]}{\sqrt{1+a^2}}$. Здесь t, c, a имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае. Положив $k = 1$, получим систему, аналогичную (4). Ее решение задается формулой (6), где $u = (x+y)/\sqrt{1+a^2}$, $v = (x-y)/\sqrt{1+a^2}$ и $f(v) = \operatorname{th}(av/2 + c_1)$ или $f(v) = \operatorname{cth}(av/2 + c_1)$. Во втором случае решение разрывно при $av/2 + c_1 = 0$, но его можно преобразовать так же, как это сделано в предыдущем пункте.

4. Замечание. Решив систему (2) для $k = 1$, можно получить ее решение для произвольного k, заменив x и y на xk и y/k соответственно. Таким образом, все решения получены без ограничения общности вычислений.

5. В заключение хочу выразить искреннюю благодарность профессору Н. В. Ефимову за руководство и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Bianchi, Lezioni di geometriadifferenziale, Pisa, vol. 1, 1927, 715—743.

[2] Е. Н. Пелировский, Некоторые точные методы в теории нелинейных волн, Изв вузов, Радиофизика, 19:5 (1976), 883—899.

[3] И. В. Грибков, Построение некоторых регулярных решений уравнения «синус-Гордон» с помощью поверхностей постоянной отрицательной кривизны, Вестн. МГУ (математика, механика), вып. 4 (1977), 78—83.

Поступило в Правление общества 11 мая 1977 г.