Задачи по теоретической физике
Листок 2. “Дифференциальная геометрия”

Определение 1. Гладкое многообразие $\mathcal{M}$ — это множество точек P, покрытое пересекающимися окрестностями (*картами*), на каждой из которых можно ввести координаты (однозначные на данной окрестности функции точки $P \in \mathcal{M}$ со значениями в $\mathbb{R}^n$). Координаты точек, принадлежащих двум пересекающимся окрестностям связаны гладкой заменой: $x^i_{(1)}(P) = f^i_{(12)}(x^j_{(2)}(P))$, при этом $f^i_{(12)}$ называются функциями переклейки.

Пример. Двумерная сфера S^2 — гладкое многообразие. Его можно покрыть двумя окрестностями — покрывающими северное и южное полушария. Отображение каждой окрестности в $\mathbb{R}^2$ можно задать, например, центральной проекцией из противоположного полюса. Функция переклейки на экваторе дается тождественным отображением.

Задача 1 (1)**.** Покажите, что следующие множества можно рассматривать как гладкие многообразия. Введите карты, найдите функции переклейки:

1. Трехмерная сфера S^3.

2. Множество прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^3$. Это множество можно также рассматривать как фактор-пространство: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}/\mathbf{x} \simeq \lambda\mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Это многообразие называется $\mathbb{R}P^2$.

3. Множество комплексных прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{C}^2$. Это множество можно также рассматривать как фактор-пространство: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2\}/\mathbf{x} \simeq \lambda\mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Это многообразие называется $\mathbb{C}P^1$ или просто $\mathbb{P}^1$.

4. Группа $SU(2) = \{U \in \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C}) \,|\, U^\dagger U = 1, \det U = 1\}$. Сравните с многообразием из п. 1.

Задача 2 (2)**.** Понятие карт и функций переклейки встречается также в калибровочных теориях. Пусть на сфере S^2 имеется постоянное магнитное поле, нормальное к ее поверхности, причем полный магнитный поток сквозь сферу равен $\frac{2\pi}{q}$ (q — элементарный заряд). Покажите, что невозможно ввести несингулярный векторный потенциал для такого магнитного поля на всей сфере. Введите *два* несингулярный векторных потенциала: A_{N} на северном полушарии и A_{S} на южном (аналоги карт). Покажите, что два потенциала связаны между собой на экваторе калибровочным преобразованием с калибровочной функцией $\alpha(\phi)$ (аналог функции переклейки). Покажите, что $e^{iq\alpha(\phi)}$ (но не сама $\alpha(\phi)$) является однозначной функцией точки на экваторе. Найдите $\alpha(2\pi) - \alpha(0)$.

Задача 3 (1)**.** При каких значениях μ множество точек в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению $x^2 - y^2 = \mu$, является многообразием?

Определение 2. Вещественным скалярным полем на многообразии называется функция точки многообразия, принимающая значения в $\mathbb{R}$.

Задача 4 (1)**.** Поскольку на данной карте a координаты $x^i_{(a)}(P)$ однозначно определяют точку P многообразия, то можно считать скалярное поле функцией от координат $\phi_a(x^i_{(a)})$. Пусть окрестности a и b пересекаются и функция переклейки равна $f_{(ab)}$.

Используя тот факт, что скалярное поле в действительности является функцией *точки* многообразия, определить как связаны функции $\phi_{(a)}(x^i_{(a)})$ и $\phi_{(b)}(x^i_{(b)})$.

Определение 3. Векторным полем на многообразии называется зависящий от точки многообразия дифференциальный оператор первого порядка $\mathbf{v}(P) = v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$. $v^i(x)$ называются компонентами векторного поля. Множество векторных полей на данном многообразии $\mathcal{M}$ обозначается $T\mathcal{M}$. Векторные поля действуют на скалярные поля как дифференциальные операторы.

Задача 5 (1)**.** Пользуясь тем фактом, что выражение для дифференциального оператора $\mathbf{v}$ справедливо на всех картах многообразия, найдите закон преобразования компонент вектора v^i при переходе с одной карты на другую.

Задача 6 (1)**.** Пусть компоненты вектора v в точке $(3, 4)$ в ортогональной системе координат в $\mathbb{R}^2$ равны $(1, 2)$. Найдите его компоненты в полярной системе координат.

Задача 7 (1)**.** Покажите, что коммутатор двух векторных полей является векторным полем. Найдите его компоненты.

Задача 8 (1)**.** Покажите, что множество всех векторов в фиксированной точке P многообразия $\mathcal{M}$ является векторным пространством (касательное пространство к многообразию $\mathcal{M}$ в точке P , обозначается $T_P\mathcal{M}$). Найти размерность этого векторного пространства.

Определение 4. Контравариантным тензором ранга k называют линейную комбинацию тензорных произведений k векторных полей: $\mathbf{v}_{(k)}(P) = v^{i_1\cdots i_k}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$, причем коэффициенты $v^{i_1\cdots i_k}$ называются компонентами тензора. Множество контравариантных тензорных полей на многообразии $\mathcal{M}$ обозначается $T^{\otimes k}\mathcal{M}$.

Задача 9 (1)**.** Пользуясь тем фактом, что выражение для тензора $\mathbf{v}_{(k)}$ справедливо на всех картах многообразия, найдите закон преобразования компонент тензора $v^{i_1\cdots i_k}$ при переходе с одной карты на другую.

Задача 10 (1)**.** Пусть V — векторное пространство, F — вещественная линейная функция из V в $\mathbb{R}$ *(линейная форма)*, т.е. $F : V \to \mathbb{R}$. Пусть в V имеется базис $\mathbf{e}_i$. Компонентами линейной формы F называется набор чисел $\{F(\mathbf{e}_i)\}$. Найти закон преобразования компонент линейной формы. Сравнить с законом преобразования компонент вектора.

Определение 5. Пространство линейных форм на векторном пространстве V называется сопряженным пространстом и обозначается V^*. Сопряженное к касательному пространству $T_P\mathcal{M}$ многообразия $\mathcal{M}$ в точке P называется кокасательным пространством и обозначается $T^*_P\mathcal{M}$. Элементы кокасательного пространства называются ковариантными векторами, ковекторами, или 1-формами. В частности, дифференциал функции $df(P) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}dx^i$ является ковектором — его значение на векторе $v(P) = v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ равно $(df)(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{v}, df\rangle = \mathbf{v}f = v^i\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}$.

Задача 11 (1)**.** Найти закон преобразования компонент дифференциала $\left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$ при замене координат. Сравнить с законом преобразования векторного поля.

Определение 6. Тензорным полем типа (n, m) на многообразии[1] называется объект, компоненты которого в координатах имеют вид $T^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m}(x)$ и при замене координат

[1] Всюду многообразия предполагаются достаточно гладкими — функции переклейки дифферецируемы нужное число раз.

преобразуются по закону $T^{\tilde{i}_1\cdots\tilde{i}_n}_{\tilde{j}_1\cdots\tilde{j}_m}(\tilde{x}) = \frac{\partial\tilde{x}^{\tilde{i}_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial\tilde{x}^{\tilde{i}_n}}{\partial x^{k_n}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial\tilde{x}^{\tilde{j}_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_m}}{\partial\tilde{x}^{\tilde{j}_m}}T^{k_1\cdots k_n}_{l_1\cdots l_m}(x)$. Скалярное поле — это тензорное поле типа $(0,0)$, векторное поле — поле типа $(1,0)$, поле 1-форм — поле типа $(0,1)$. Верхние индексы называются контравариантными, нижние - ковариантными. Тензоры типа (n,m) на d-мерном многобразии образуют линейное пространство размерности d^{m+n}.

Задача 12 (1). а) Покажите, что верхние и нижние индексы тензора можно *сворачивать*, и при этом снова получается тензор, например T^i_i — тензор типа $(0,0)$.

б) Покажите, что тензорное произведение векторов — тензор. Найдите его компоненты.

в) Покажите, что при перестановке индексов одного типа (например, только верхних), тензор остается тензором. Можно ли переставлять индексы разного типа (верхние и нижние)?

г) Покажите, что частная производная тензора, вообще говоря, не есть тензор. То есть если $T^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m}$ — тензор, то $S^{j_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_{m+1}} = \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}T^{i_1\cdots i_n}_{j_2\cdots j_{m+1}}$ тензором не является.

Задача 13 (1). а) Покажите, что δ^i_j является тензором типа $(1,1)$, а δ_{ij} не является тензором типа $(0,2)$

б) Пусть a^{ij} - тензор типа $(2,0)$. Показать, что числа b_{ij}, удовлетворяющие условию $a^{ij}b_{jk} = \delta^i_k$, образуют тензор типа $(0,2)$.

в) Пусть a_{ij} - тензор типа $(0,2)$. Пусть оно невырождено, тогда существует обратная матрица к матрице $A = (a_{ij})$, обозначим её элементы как a^{ij}, $a_{ik}a^{kj} = \delta^i_j$. Рассмотрим объекты $a_{\alpha i_1}T^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m}$ и $a^{\alpha j_1}T^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m}$. Являются ли они тензорами? какого типа?

г) Является ли $\epsilon_{i_1\cdots i_n}$ тензором на n-мерном многообразии?

Задача 14 (1). а) Доказать, что если тензор T_{ijk} симметричен по первым двум индексам и антисимметричен по второму и третьему, то он равен нулю.

б) Доказать, что если a_{ij} - симметрический, b^{ij} - антисимметрический тензоры, то $a_{ij}b^{ij} = 0$.

Определение 7. Будем говорить, что на многообразии задана *метрика*, если любому ненулевому вектору в любой точке многообразия, $\mathbf{v}(P)$, можно сопоставить положительное число $g(P|\mathbf{v}(P),\mathbf{v}(P))$ — квадрат его длины — причем функция $g(P|\mathbf{v},\mathbf{w})$ линейна по $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Иными словами, на касательном пространстве к каждой точке многообразия задана билинейная симметрическая положительно-определенная форма. Многообразие с метрикой называется *римановым* многообразием.[2]

Задача 15 (0.5). а) Покажите, что в координатной карте метрику можно записать как $g(P|\mathbf{v}(P),\mathbf{w}(P)) = g_{ij}(x)v^i(x)w^j(x)$. Матрица g_{ij} называется матрицей компонент метрики. Найдите закон преобразования компонент метрики при замене координат. Является ли метрика тензором? Покажите, что для каждой

[2] В общей теории относительности используются *псевдо*римановы многообразия. Они отличаются от римановых тем, что квадрат длины вектора может быть как положительным так и отрицательным.

точки многообразия всегда существует такой выбор координат, что матрица компонент метрики — единичная.

б) Если в некоторых координатах матрица компонент единичная в *каждой* точке многообразия, то метрика называется *плоской.* Такие координаты называют плоскими. Многообразие, на котором можно ввести плоскую метрику также называется плоским. Покажите, что $\mathbb{R}^n$, окружность S^1 и тор $S^1 \times S^1$ являются плоскими.

Задача 16 (0.5)**.** Пусть сфера задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^3$, причем x, y, z — плоские координаты. Сопоставим вектору $\mathbf{v}$, касательному к сфере, квадрат его длины в $\mathbb{R}^3$. Найдите компоненты полученной таким образом метрики.

Задача 17 (1)**.** а) Покажите, что индексы тензора можно *поднимать* и *опускать* с помощью метрики, например $T^i_j g^{jk}$ — тензор типа $(2, 0)$.

б) Покажите, что $g(x)^{\frac{1}{2}} \epsilon_{i_1 \cdots i_n}$, где $g = \det g_{ij}$, являются компонентами тензора на n-мерном многообразии.

Определение 8. Определим *связность* или *параллельный перенос* вектора $\mathbf{v}(P)$ из точки P на вектор $\mathbf{w}$ как оператор $\Gamma_{\mathbf{w}}$, линейный по $\mathbf{w}$ и дающий вектор $\mathbf{v}_{\text{trans}}(P + \mathbf{w}) = \Gamma_{\mathbf{w}}(P)\mathbf{v}(P)$. *Ковариантная производная* векторного поля $\mathbf{v}$ определяется как $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(P+\mathbf{w}) - \mathbf{v}_{\text{trans}}(P+\mathbf{w})$. Ковариантная производная действует на тензорное произведение векторов по правилу Лейбница: $\nabla_{\mathbf{w}}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = (\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}) \otimes \mathbf{u} + \mathbf{v} \otimes (\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{u})$. Будем считать, что скалярное поле параллельно переносится без изменений, $\phi_{\text{trans}}(P + \mathbf{w}) = \phi(P)$

Задача 18 (1)**.** Как записываются компоненты связности в координатах? Найдите закон преобразования компонент связности при замене координат, считая, что взятие ковариантной производной — тензорная операция.

Задача 19 (1)**.** Пусть многообразие $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$. Докажите, что ковариантная производная является тензорной операцией. Являются ли тензором компоненты связности?

Определение 9. Связность Γ называется согласованной с метрикой, если $\nabla_i g_{jk} = 0$. Кручением связности Γ называется тензор $C^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$. Мы будем рассматривать только связности без кручения, согласованные с метрикой. Такие связности называются римановыми связностями.

Задача 20 (0.5)**.** Показите, что если в некоторых координатах компоненты связности равны нулю всюду на многообразии, то метрика плоская.

Задача 21 (1)**.** Найдите выражение для компонент связности через компоненты метрики. Покажите, что

а) $\Gamma^i_{ji} = \partial_i \ln \sqrt{g}$,

б) $\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} v^i)$,

в) $\nabla_i \nabla^i \phi = \nabla_i g^{ij} \nabla_j \phi = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} g^{ij} \partial_j \phi$.

Задача 22 (1)**.** Найдите компоненты ковариантной производной от скалярного поля, векторного поля. Покажите, что $\nabla_i \alpha_j - \nabla_j \alpha_i = \partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i$, и вообще $\nabla_{[i} \omega_{jk\cdots]} = \partial_{[i} \omega_{jk\cdots]}$, где скобки обозначают антисимметризацию.

Задача 23 (1)**.** Покажите, что $[\nabla_j, \nabla_k]v^i = R^i_{jkl}v^l$, причем R^i_{jkl} является тензором. Выразите компоненты этого тензора через компоненты связности.

Определение 10. R^i_{jkl} называется тензором *кривизны*, или тензором Римана.

Задача 24 (2)**.** Покажите, что если $R^i_{jkl} = 0$ всюду на многообразии, то можно выбрать координаты так, что связность также равна нулю. Обратно, покажите, что если хотя бы где-то $R^i_{jkl} \neq 0$, то связность не может быть нулевой всюду.

Задача 25 (2)**.** Покажите, что тензор $R_{ijkl} = g_{im}R^m_{jkl}$ имеет следующие симметрии:

а) $R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl}$,

б) $R_{ijkl} = R_{klij}$,

в) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$. *Указание:* используйте тождество Якоби $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$, верное для любых операторов A, B, C.

г) $\nabla_i R^m_{jkl} + \nabla_j R^m_{kil} + \nabla_k R^m_{ijl} = 0$.

Задача 26 (2)**.** Рассмотрим действие для частицы в гравитационном поле, заданном метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$S = -\int \left(e^{-1}(\tau) g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + me(\tau) \right) d\tau \tag{1}$$

а) Найдите уравнения движения для полей $x^\mu(\tau)$ и $e(\tau)$.

б) Покажите, что действие инвариантно относительно замены координат $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu(x)$.

в) Покажите, что действие инвариантно отнсительно репараметризации мировой линии частицы:

$$\tau \mapsto \tilde{\tau}(\tau), \tag{2}$$

$$e(\tau) \mapsto \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} e(\tilde{\tau}). \tag{3}$$

Выберите $\tilde{\tau}$ так, чтобы $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}}\frac{dx^\nu}{d\tilde{\tau}} = 1$, и запишите уравнения движения в этой параметризации.

г) Пусть компоненты $\Gamma^i_{00} = \partial_i \Phi$ малы, а остальные компоненты $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ равны нулю. Запишите уравнения движения в этом пределе. Сравните со вторым законом Ньютона. Каков физический смысл поля $\Phi(x)$?

Список литературы

[1] S. Mukhi, N. Mukunda, Introduction to Topology, Differential Geometry and Group Theory for Physicists.

[2] В. И. Арнольд, Математические методы классической механики.

[3] Л. Д. Ландау, Теоретическая физика, том II, Теория поля.

[4] Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, Введение в теорию ранней Вселенной, том 1, Приложение А.

[5] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, Курс дифференциальной геометрии и топологии.

[6] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев, А. Т. Фоменко, Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.

[7] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ.

[8] В. Н. Тришин, Геометрические и топологические структуры физики. http://www.polynumbers.ru/articles/430/ru/pdf/09-04.pdf

[9] М. О. Катанаев, Геометрические методы в математической физике. arXiv: 1311.0733v2 [math-ph]